

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

– ETAPA LOCALĂ, 7.02.2026–

Clasa a V-a

SUBIECTUL 1 (22,5p)

11,5p a) Demonstrați că numărul natural

$$a = 2026^{2025} + 2025^{2026} + 2024^{2027} + 2023^{2028} + 2022^{2029} \text{ nu este pătrat perfect.}$$

11p b) Demonstrați că numărul $b = (1 + 3 + 5 + \dots + 2027)^n$ este pătrat perfect pentru orice număr natural n .

Soluție:

a) Calculăm ultima cifră a numărului:

$$U(2026^{2025}) = 6; U(2025^{2026}) = 5$$

3,5p

$$U(2024^{2027}) = 4; U(2023^{2028}) = 1$$

4p

$$U(2022^{2029}) = 2$$

2p

$$U(a) = U(6+5+4+1+2) = 8, \text{ deci numărul nu poate fi pătrat perfect}$$

2p

$$\text{b) } 1+3+5+\dots+2027 = 2028 \cdot 1014 : 2 =$$

4p

$$= 1014^2$$

4p

$$b = (1014^2)^n = (1014^n)^2, \text{ deci este pătrat perfect.}$$

3p

SUBIECTUL 2 (22,5p)

Un număr natural nenul n se numește "frumusețel" dacă împărțit la 46 dă restul de 3 ori mai mare decât câtul.

11,5p a) Determinați numerele "frumusețele" de două cifre.

11p b) Determinați numerele "frumusețele" care sunt pătrate perfecte.

Soluție:

$$\text{a) } n = 46a + 3a \Rightarrow n = 49a, \text{ cu } 3a < 46 \Rightarrow 1 \leq a \leq 15$$

5,5p

$$\text{Numărul } n \text{ are două cifre dacă } 49a \leq 99 \Rightarrow n = 49, 98$$

6p

b) Numărul 49 este pătrat perfect, deci n este pătrat perfect dacă și numai dacă a este pătrat perfect.

5p

Sunt 3 pătrate perfecte nenule mai mici decât 15. Acestea sunt 1, 4 și 9, de unde rezultă că sunt 3 numere naturale "frumusețele" pătrate perfecte. Acestea sunt 49, 196 și 441.

6p

SUBIECTUL 3 (22,5p)

Un număr natural de trei cifre împărțit la răsturnatul său dă câtul 3 și restul 175. Diferența dintre cifra sutelor și cifra unităților numărului dat este 7. Determinați numărul.

GAZETA MATEMATICĂ

Soluție:

$$\overline{abc} : \overline{cba} = 3 \text{ rest } 175, \quad 175 < \overline{cba}$$

3,5p

$$\overline{abc} = 3 \cdot \overline{cba} + 175, \quad 175 < \overline{cba} \text{ de unde avem}$$

4p

$$100a + 10b + c = 3(100c + 10b + a) + 175 \text{ și}$$

$$100a + 10b + c = 300c + 30b + 3a + 175$$

4p

$$97a = 299c + 20b + 175;$$

3p

Cum $a = c + 7$, relația devine:

2p

$$97(c + 7) = 299c + 20b + 175 \text{ și deci}$$

$$504 = 202c + 20b \text{ de unde } U(202c) = 4$$

4p

Așadar $c = 2, b = 5$ și $a = 9$

$$\overline{abc} = 952$$

2p

SUBIECTUL 4 (22,5p)

Aflați numerele naturale de forma $\overline{abc}$ și numerele naturale x și y știind că:

$$4 \cdot (\overline{abc} + 3^{x+2}) = 2025 - 2^y$$

Soluție:

$4 \cdot (\overline{abc} + 3^{x+2})$ este număr natural par, de unde rezultă că $2025 - 2^y$

este par, deci 2^y este impar $\Rightarrow y = 0$

5,5p

Se obține $\overline{abc} + 3^{x+2} = 506$. Dar $3^6 = 729 > 506 \Rightarrow x = 0, 1, 2, 3$

5p

Pentru $x = 0 \Rightarrow \overline{abc} = 497$

3p

Pentru $x = 1 \Rightarrow \overline{abc} = 479$

3p

Pentru $x = 2 \Rightarrow \overline{abc} = 425$

3p

Pentru $x = 3 \Rightarrow \overline{abc} = 263$

3p

Notă:

Orice altă soluție corectă se punctează corespunzător.